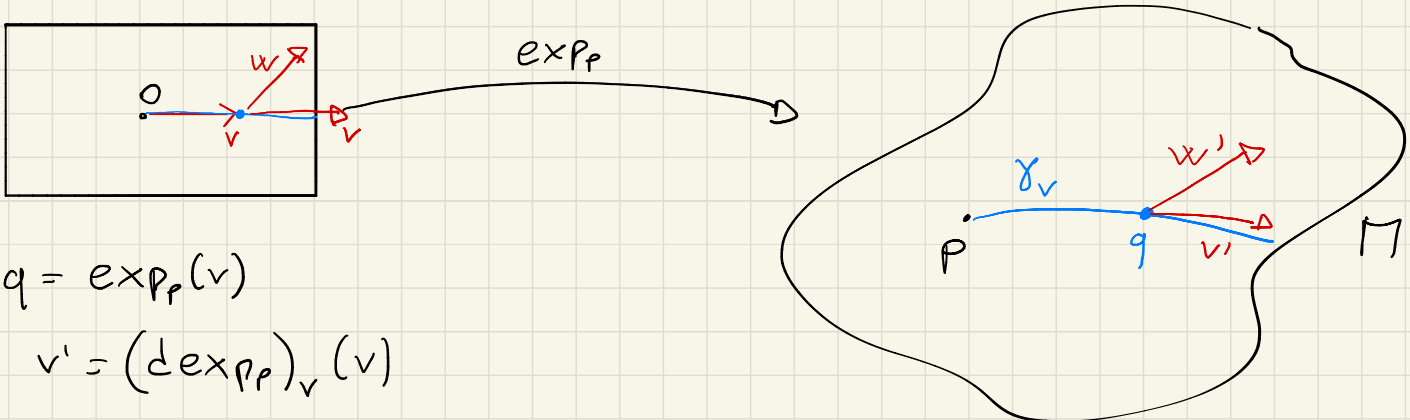
Lezione 27

Lemma di Gauss: (M,g) pseudo-Riem.



$q = \exp_p(v)$

$v' = (d\exp_p)_v(v)$

$w' = \quad " \quad " \quad (w)$

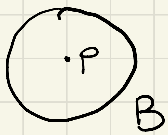
$\langle v,v\rangle = \langle v',v'\rangle$

$\langle v,w\rangle = \langle v',w'\rangle$

Attenzione: $(d\exp_p)_v$ non è isometria in generale

Cor: Lemma di Gauss geometrico: Se (M,g) è Riemanniana, Le sfere geodetiche centrate in p sono ortogonali alle geodetiche uscenti da p

Def:



$\exists\, r>0$ t.c. $\boxed{\exp_p\big|_{B(0,r)} : B(0,r) \hookrightarrow M \text{ è embedding } \star}$

$B = \exp_p(B(0,r))$ è PALLA GEODETICA

$B(0,r) \subseteq T_pM \underset{\text{isom.}}{\cong} \mathbb{R}^n$

Una SFERA GEODETICA è $\partial B'$

$B' = \exp_p(B(0,r'))$ $\quad r'<r$

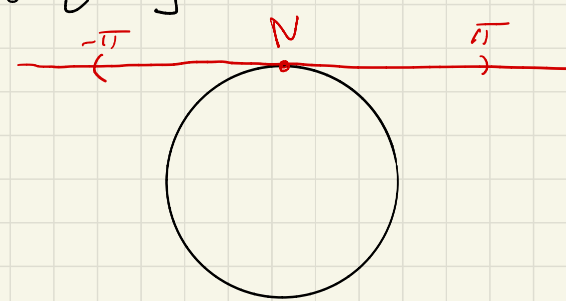
Sappiamo che $\quad \exp_p(B(0,r)) \subseteq B(p,r)$

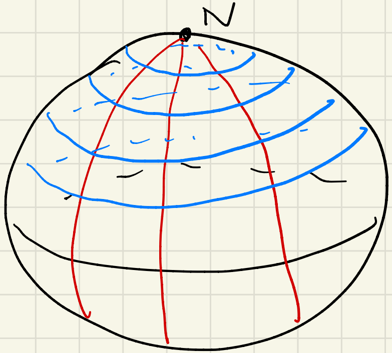
Il RAGGIO DI INIETTIVITÀ $\quad inj_p(M) = \sup\limits_{r>0} \{\star\}$

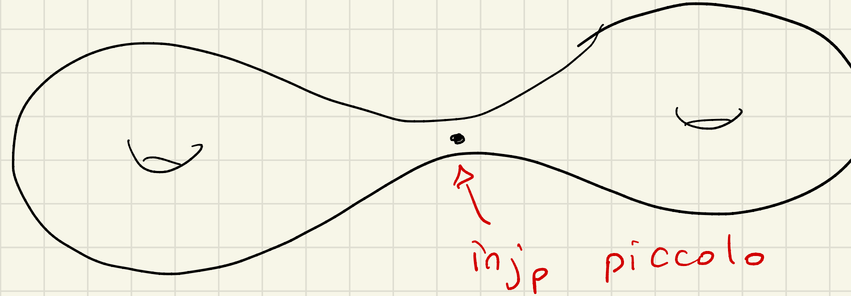
Es: $\mathbb{R}^{p,q} \qquad inj_x(\mathbb{R}^{p,q}) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$

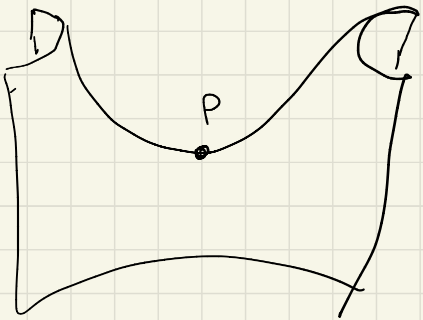
$\mathbb{H}^n \qquad {''}_x(\mathbb{H}^n) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{H}^n$

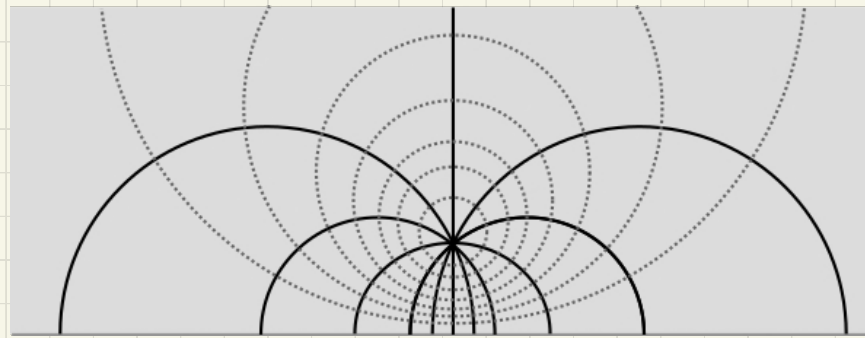
$S^n \qquad inj_x(S^n) = \pi$











COMPLETEZZA

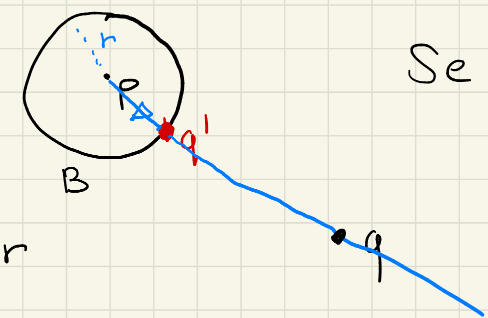
$V = TM$

Def: (M, ∇) è GEODETICAMENTE COMPLETA se tutte le geodetiche esistono su $\mathbb{R}$ (cioè $\exp : TM \to M$)

Prop: (M, g) Riemanniana connessa e geodeticamente completa. $\forall p, q \in M \ \exists$ geodetica γ minimizzante che li collega.

$\overset{\shortparallel}{L(\gamma) = d(p,q)}$

dim:



Se $q \in B \Rightarrow$ ok $\gamma_{p,q}$ funziona

Se $q \notin B$ Sia $q' \in \partial B$ con $d(q', q)$ minima

$\exists! \, \gamma_v$, $\|v\| = 1$ t.c.

$\gamma_v(r) = q'$

$D = d(p,q) > r$

$\gamma_v : \mathbb{R} \to M$

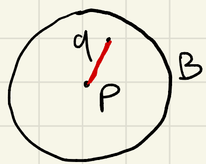
$I = \{ t \in [0, D] \mid d(\gamma_v(t), q) = D - t \}$ è chiuso

$I \neq \emptyset$ $\quad 0 \in I$ $\quad$ Ex: è anche aperto (inizia con $d(q', q) = D - r$)

$\Rightarrow I = [0, D]$

$\square$

Conseguenza del Lemma di Gauss: (M,g) Riemanniana



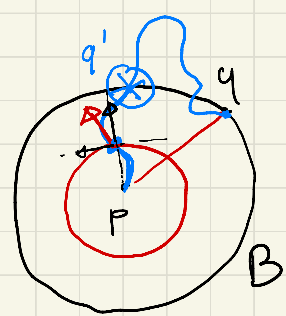
$B = \exp_p(B(0,r))$ palla geodetica

$\exists!\ \gamma_{p,q} : [0,1] \to B$ geodetica $\gamma_{p,q}(0) = p$ $\gamma_{p,q}(1) = q$

<u>Prop</u>: $\gamma_{p,q}$ è minimizzante in M. Ogni altra $\alpha : I \to M$ minimizzante (cioè $L(\alpha) = d(p,q)$) che collega p e q è $\gamma_{p,q}$ riparametrizzata.

<u>dim</u>:

M



$\gamma_{p,q}$

$\bar{\alpha}$ collega p con $p' \in \partial B$

Tesi: $L(\bar{\alpha}) \geq r = L(\gamma_{p,q})$ $\square$

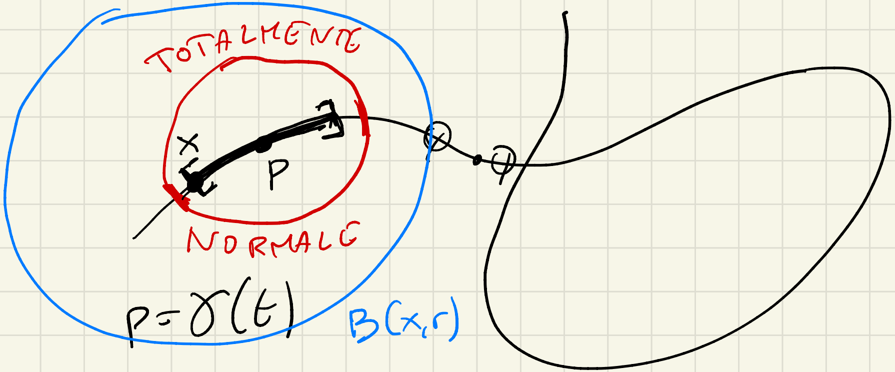
Cor: (M,g) Riem. geod. completa $\Rightarrow \forall p$, $\exp_p : T_pM \to M$
connessa **suriettiva**

Cor: Se $\exp_p(B(0,r))$ è palla geodetica allora
$$\exp_p(B(0,r)) = B(p,r)$$
vero anche se g non è geod. completa

Cor: Se (M,g) è geod. completa,
$$\exp_p(B(0,r)) = B(p,r) \quad \forall r$$

Def: (M,g) Riemanniana. $\gamma : [a,b] \to M$ MINIMIZZA LA DISTANZA se $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma)$.

MINIMIZZA LOCALMENTE LA DISTANZA se $\forall t \in [a,b]$ $\exists$ $U(t) = [a', b']$ t.c. $\gamma|_U$ minimizza la distanza



Teo: Le curve che minimizzano localmente la distanza sono precisamente le geodetiche (eventualmente riparametrizzate)

Back to completeness

Teo: (Hopf-Rinow)

(M,g) Riemanniana connessa. Sono fatti equivalenti:

1) M geodeticamente completa
2) $K \subseteq M$. K cpt $\Leftrightarrow$ K chiuso e limitato
3) M completa come spazio metrico

1) $\Rightarrow$ 2) Limitato $:= \exists D, p$ t.c. $K \subseteq B(p, D)$

$\Rightarrow$ sempre vero

$\Leftarrow$ $K \subseteq M$ chiuso e limitato

$\Downarrow$

$K \subseteq B(p, D) \overset{=}{\uparrow} \exp_p(B(0, D))$

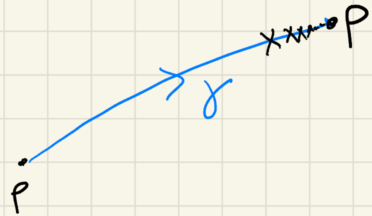
geod. compl.

$\Rightarrow$ $K \subseteq \exp_p(\overline{B(0,D)})$, with $\overline{B(0,D)}$ cpt and $\exp_p(\overline{B(0,D)})$ cpt, K ch $\subseteq$ cpt $\Rightarrow K$ cpt

2) $\Rightarrow$ 3) $\{x_i\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\overline{\{x_i\}}$ chiusa e limitata $\Rightarrow$ cpt

$\Rightarrow \exists$ sottosucc. conv. $\Rightarrow$ x_i conv.

3) $\Rightarrow$ 1) M completa $\Rightarrow$ M geod. completa



$\gamma : [0,T) \to M$ geodetica massimale

$t_i \in [0,T) \quad t_i \to T$

γ geod $\Rightarrow$ γ Lipschitz $\Rightarrow$ manda Cauchy in Cauchy

γ geod $\Rightarrow \|\gamma'\|$ cost $\Rightarrow$ γ Lipschitz

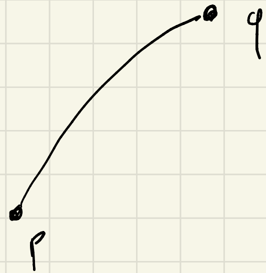
manda Cauchy in Cauchy $\Rightarrow$ $\gamma(t_i)$ Cauchy

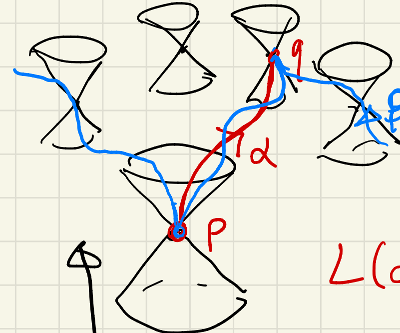
Per un lemmino assurdo perché γ è estendibile $\Leftarrow$ $\gamma(t_i) \to p$ $\underset{(3)}{\Leftarrow}$ $\gamma(t_i)$ Cauchy

$\square$

<u>Cor</u>: M cpt conn. $\Rightarrow$ M geod. completa $\Rightarrow$ $\exp_p : T_pM$ suriett. $\forall p$

Lorentz è diverso qui! $\exists$ M cpt Lorentziane non geod. complete





α curva di tipo tempo

$L(\alpha)$ = TEMPO PROPRIO